# Ketaksamaan Dasar

Wildan Bagus Wicaksono

Diperbarui 22 Agustus 2022

Topik yang dibahas kali ini mengenai *Ketaksamaan Dasar*. Dalam hal ini saya bahas mengenai beberapa ketaksamaan dasar yang menurut saya cukup untuk Olimpiade Sains Nasional (OSN). Walaupun sebenarnya di OSN hanya cukup menggunakan ketaksamaan trivial, ketaksamaan antar rataan, dan Cauchy Schwarz, ketaksamaan lainnya juga akan berguna sewaktu-waktu. Hal ini bisa juga kalian gunakan untuk mencari ide menggunakan ketaksamaan yang "aneh" dengan ketaksamaan dasar.

## Daftar Isi

# §1 Ketaksamaan Trivial

Ketaksamaan trivial mengatakan bahwa kuadrat dari suatu bilangan riil selalu bernilai tak negatif. Dengan kata lain, untuk setiap bilangan riil $x$, berlaku $x^2 \geq 0$. Dari ketaksamaan ini melahirkan banyak ketaksamaan non-trivial dan berguna, dan seringkali sangat berguna dalam menyelesaikan ketaksamaan di olimpiade.

**Definisi 1.1.** Untuk setiap bilangan riil $x$, kita punya $x^2 \geq 0$ dan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = 0$.

Untuk mendapatkan bagaimana menghasilkan ketaksamaan non-trivial, kita subtitusi $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ untuk suatu bilangan riil tak negatif $a$ dan $b$. Kita punya

$$0 \leq x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

yang mana merupakan ketaksamaan AM-GM yang akan dibahas lebih lanjut di bagian selanjutnya. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = 0$, yaitu $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \iff a = b$.

Berikut bukti singkat dari ketaksamaan trivial.

*Bukti.* Kita bagi tiga kasus, yaitu jika $x > 0$, $x = 0$, atau $x < 0$. Jika $x > 0$, maka $x^2 = x \cdot x > 0$ karena bilangan positif dikali dengan bilangan positif juga akan menghasilkan bilangan positif. Jika $x = 0$, maka $x^2 = 0$. Jika $x < 0$, subtitusi $x = -y$ untuk $y > 0$. Maka $x^2 = (-y)^2 = (-1)^2 \cdot y^2 = 1 \cdot y \cdot y > 0$. Maka terbukti bahwa untuk sembarang bilangan riil $x$ kita punya $x^2 \geq 0$. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = 0$. □

**Contoh 1.2**

Untuk setiap bilangan riil positif $x$, buktikan bahwa $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $x$ tidak akan mengubah tanda ketaksamaan karena $x > 0$. Maka

$$\begin{aligned} & x + \tfrac{1}{x} && \geq 2 \\ \iff & x^2 + 1 && \geq 2x \\ \iff & x^2 - 2x + 1 && \geq 0 \\ \iff & (x-1)^2 && \geq 0 \end{aligned}$$

yang jelas benar menurut ketaksamaan trivial. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = 1$. ■

**Contoh 1.3**

Untuk sembarang bilangan riil $a, b$, dan $c$, buktikan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Kita mulai dengan memindahkan semuanya ke ruas kiri, yaitu

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca && \geq 0 \\ \iff & 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca && \geq 0 \\ \iff & \left(a^2 - 2ab + b^2\right) + \left(b^2 - 2bc + c^2\right) + \left(c^2 - 2ca + a^2\right) && \geq 0 \\ \iff & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 && \geq 0. \end{aligned}$$

Dari ketaksamaan trivial, berlaku $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0$, dan $(c-a)^2 \geq 0$. Jumlahkan semuanya dan kita peroleh seperti yang diminta. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a - b = 0, b - c = 0$, dan $c - a = 0$ yang menyimpulkan $a = b = c$. ■

## Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 1.4.** Jika $x$ bilangan riil, buktikan bahwa:

(a). $x^2+1 \geq 2x$. (b). $4x^2+1 \geq 4x$. (c). $x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2$ untuk $x \neq 0$.

Cari kapan kesamaan terjadi.

**Exercise 1.5.** Misalkan $a$ dan $b$ adalah dua bilangan riil. Buktikan bahwa

(a). $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.

(b). $a^2-ab+b^2 \geq 0$.

(c). $2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$.

(d). $(a+1)(b+1)(1+ab) \geq 8ab$.

(e). $\left(a^3-b^3\right)(a-b) \geq 3ab(a-b)^2$.

Cari kapan kesamaan terjadi.

**Exercise 1.6.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ dan cari kapan kesamaan terjadi.

## §2 Ketaksamaan Antar Rataan

Kita mulai dengan definisi dari empat rataan.

**Definisi 2.1** (Rataan Kuadrat/Quadratic Mean - QM)**.** Jika diberikan data (bilangan) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka rataan kuadrat dari data itu dinyatakan dengan

$$\mathrm{QM}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

**Definisi 2.2** (Rataan Aritmetik/Arithmetic Mean - AM)**.** Jika diberikan data (bilangan) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka rataan aritmetika data itu dinyatakan dengan

$$\mathrm{AM}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

**Definisi 2.3** (Rataan Geoemetri/Geometric Mean - GM)**.** Jika diberikan data (bilangan) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka rataan geometrik dari data itu dinyatakan dengan

$$\mathrm{GM}=\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

**Definisi 2.4** (Rataan Harmonik/Harmonic Mean - HM)**.** Jika diberikan data (bilangan) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, maka rataan harmonik dari data itu dinyatakan dengan

$$\mathrm{HM}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

**Teorema 2.5** (Ketaksamaan Antar Rataan)

Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah bilangan riil positif, berlaku $\mathrm{QM} \geq \mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$. Dengan kata lain, berlaku

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

*Bukti.* Untuk $n = 1$ jelas terpenuhi. Sekarang tinjau untuk $n \geq 2$. Pertama, akan kita buktikan QM $\geq$ AM dengan induksi. Untuk $n = 2$, maka

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} &&\geq \frac{x_1 + x_2}{2}\\
\iff\quad &\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} &&\geq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4}\\
\iff\quad &2x_1^2 + 2x_2^2 &&\geq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\\
\iff\quad &x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &&\geq 0\\
\iff\quad &(x_1 - x_2)^2 &&\geq 0
\end{aligned}$$

yang jelas benar menurut ketaksamaan trivial. Maka $n = 2$ benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, maka

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}{k}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \iff x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^2}{k}.$$

Sekarang tinjau untuk $n = k + 1$. Maka kita ingin membuktikan

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2}{k+1}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}}{k+1}.$$

Dari hipotesis induksi, kita punya

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2}{k+1}} = \sqrt{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2) + x_{k+1}^2}{k+1}} \geq \sqrt{\frac{\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2}{k} + x_{k+1}^2}{k+1}}.$$

Untuk membuktikan suatu ketaksamaan $A \geq B$, kita bisa juga membuktikannya melalui $A \geq X$ dan $X \geq B$ karena hal ini akan menyimpulkan $A \geq X \geq B \implies A \geq B$. Misalkan $y_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. Kita ingin membuktikan

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2}{k} + x_{k+1}^2}{k+1}} &&\geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}}{k+1}\\
\iff\quad &\frac{y_k^2 + kx_{k+1}^2}{k(k+1)} &&\geq \frac{(y_k + x_{k+1})^2}{(k+1)^2}\\
\iff\quad &(k+1)\left(y_k^2 + kx_{k+1}^2\right) &&\geq k\left(y_k^2 + 2y_kx_{k+1} + x_{k+1}^2\right)\\
\iff\quad &ky_k^2 + k^2x_{k+1}^2 + y_k^2 + kx_{k+1}^2 &&\geq ky_k^2 + 2ky_kx_{k+1} + kx_{k+1}^2\\
\iff\quad &k^2x_{k+1}^2 - 2ky_kx_{k+1} + y_k^2 &&\geq 0\\
\iff\quad &(kx_{k+1} - y_k)^2 &&\geq 0
\end{aligned}$$

yang jelas benar menurut ketaksamaan trivial. Sehingga kita punya

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2}{k+1}} \geq \sqrt{\frac{\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2}{k} + x_{k+1}}{k+1}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}$$

yang berarti

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2}{k+1}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}$$

sehingga untuk $n = k + 1$ juga benar. Maka menurut induksi terbukti berlaku QM $\geq$ AM. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $y_k = kx_{k+1}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ sehingga bisa kita peroleh $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Kedua, buktikan AM $\geq$ GM dengan induksi pula. Bukti ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Ketiga, akan kita buktikan GM $\geq$ HM dengan induksi pula. Untuk $n = 2$, kita punya

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1x_2} &\geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \\ \iff \quad x_1x_2 &\geq \frac{4}{\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}} \\ \iff \quad x_1x_2\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2}\right) &\geq 4 \\ \iff \quad \frac{x_2}{x_1}+2+\frac{x_1}{x_2} &\geq 4 \\ \iff \quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2 &\geq 0 \\ \iff \quad \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}{x_1x_2} &\geq 0 \\ \iff \quad \frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

yang jelas benar menurut ketaksamaan trivial. Asumsikan untuk suatu $n = k$ maka berlaku

$$\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \geq \frac{k}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}} \iff x_1x_2\cdots x_k \geq \left(\frac{k}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}}\right)^k.$$

Tinjau untuk $n = k+1$, maka kita ingin membuktikan

$$\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}} \geq \frac{k+1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_{k+1}}}.$$

Dari hipotesis induksi, kita punya

$$\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}} = \sqrt[k+1]{(x_1x_2\cdots x_k)\,x_{k+1}} \geq \sqrt[k+1]{\frac{k^k}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}\right)^k}\cdot x_{k+1}}.$$

Subtitusi $x_i = a_i \cdot x_{k+1}$ untuk setiap $1 \leq i \leq k$. Akan kita buktikan bahwa

$$\begin{aligned} \sqrt[k+1]{\frac{k^kx_{k+1}}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}\right)^k}} &\geq \frac{k+1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_{k+1}}} \\ \iff \quad \frac{k^kx_{k+1}}{\left(\frac{1}{a_1x_{k+1}}+\frac{1}{a_2x_{k+1}}+\cdots+\frac{1}{a_kx_{k+1}}\right)^k} &\geq \frac{(k+1)^{k+1}}{\frac{1}{a_1x_{k+1}}+\frac{1}{a_2x_{k+1}}+\cdots+\frac{1}{a_kx_{k+1}}+\frac{1}{x_{k+1}}} \\ \iff \quad \frac{k^kx_{k+1}^{k+1}}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)^k} &\geq \frac{(k+1)^{k+1}x_{k+1}^{k+1}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+1} \\ \iff \quad \frac{k^k}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)^k} &\geq \frac{(k+1)^{k+1}}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+1\right)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Misalkan $A = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}$. Maka sekarang ekuivlaen dengan membuktikan $\left(\frac{k}{A}\right)^k \geq \left(\frac{k+1}{A+1}\right)^{k+1}$. Karena fungsi $f(x) = \ln(x)$ merupakan fungsi naik, yaitu $f(a) \geq f(b) \iff a \geq b$, dengan mengambil fungsi ln kedua ruas tidak merubah tanda ketaksamaan. Kita punya

$$\begin{aligned} \frac{k^k}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)^k} &\geq \frac{(k+1)^{k+1}}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+1\right)^{k+1}} \\ \iff \quad k\ln\left(\frac{k}{A}\right) &\geq (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{A+1}\right) \\ \iff \quad k\ln(k)-k\ln(A)-(k+1)\ln(k+1)+(k+1)\ln(A+1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Tinjau fungsi $F(A) = k\ln(k) + (k+1)\ln(A+1) - (k+1)\ln(k+1) - k\ln(A)$. Untuk mencari titik kritisnya, tinjau $F'(A) = 0$, yaitu

$$0 = 0 + \frac{k+1}{A+1} - 0 - \frac{k}{A} \iff \frac{k}{A} = \frac{k+1}{A+1} \iff Ak + k = Ak + A \iff A = k.$$

Kemudian tinjau

$$F''(A) = -\frac{k+1}{(A+1)^2} + \frac{k}{A^2} \implies F''(k) = -\frac{k+1}{(k+1)^2} + \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0.$$

Maka $F(k)$ adalah nilai minimum $F(A)$ dan kita punya

$$F(A) \geq F(k) = k\ln(k) - k\ln(A) - (k+1)\ln(k+1) + (k+1)\ln(k+1) = 0 \implies F(A) \geq 0$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Maka kita simpulkan bahwa QM $\geq$ AM $\geq$ GM $\geq$ HM di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

**Contoh 2.6**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil, buktikan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Perhatikan bahwa ruas kiri merupakan penjumlahan dari bentuk $a^2, b^2, c^2$, sedangkan ruas kanan penjumlahan dari bentuk $ab, bc, ca$. Perhatikan pula ruas kanan terdapat bentuk $ab$ yang mana merupakan perkalian dari $a$ dan $b$. Dugaan kita ketaksamaan ini dapat diselesaikan dengan $AM \geq GM$. Jika $a, b, c \neq 0$, maka $a^2, b^2, c^2 > 0$ sehingga memungkinkan kita menggunakan $AM \geq GM$. Namun, berbeda jika salah satu dari $a, b, c$ bernilai 0. Maka dari itu, bagi kasus!

Jika ada dari $a, b$, atau $c$ yang bernilai 0, W.L.O.G. $c = 0$. Maka ketaksamaan ekuivalen dengan

$$a^2 + b^2 \geq ab \iff a^2 - ab + b^2 \geq 0 \iff 2a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 + (a-b)^2 \geq 0$$

yang jelas benar dari ketaksamaan trivial $a^2, b^2, (a-b)^2 \geq 0$. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = 0$.

Jika $a, b, c \neq 0$. Maka $a^2, b^2, c^2 > 0$. Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2} = ab \\ \frac{b^2+c^2}{2} &\geq \sqrt{b^2c^2} = bc \\ \frac{c^2+a^2}{2} &\geq \sqrt{c^2a^2} = ca. \end{aligned}$$

Jumlahkan ketiganya, kita peroleh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Kondisi kesamaan akhir terjadi jika dan hanya jika kondisi kesamaan setiap $AM \geq GM$ yang digunakan juga terpenuhi. Dari $AM \geq GM$ pertama, kondisi kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b$. Dari $AM \geq GM$ yang kedua dan ketiga, kondisi kesamaan terjadi jika dan hanya jika $b = c$ dan $c = a$ secara berturut-turut. Kita simpulkan bahwa kondisi kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = c$. $\blacksquare$

**Remark.** Ketaksamaan QM-AM-GM juga berlaku untuk $x_1, x_2, \cdots, x_n$ riil tak negatif (dapat diverivikasi sendiri). Sehingga untuk hal di atas kita bisa menyelesaikannya tanpa membagi kasus.

**Contoh 2.7**

Tentukan semua pasangan bilangan riil positif $(w, x, y, z)$ yang memenuhi

$$x + y + z + w + 1 = \sqrt{w} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Terkadang, soal sistem persamaan dapat diselesaikan pula dengan ketaksamaan. Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{w+\frac{1}{4}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}w} \iff w+\frac{1}{4} \geq 2\sqrt{\frac{w}{4}} \iff w+\frac{1}{4} \geq \sqrt{w}.$$

Secara analog, bisa kita peroleh $x+\frac{1}{4} \geq \sqrt{x}, y+\frac{1}{4} \geq \sqrt{y}$, dan $z+\frac{1}{4} \geq \sqrt{z}$. Jumlahkan semuanya, kita peroleh $w+x+y+z+1 \geq \sqrt{w}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$. Di soal, yang diminta terjadi ketika kondisi kesamaan. Kondisi kesamaan terjadi jika dan hanya jika $w=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}$, dan $z=\frac{1}{4}$. Maka $\boxed{(w,x,y,z)=(1/4,1/4,1/4,1/4)}$.

**Contoh 2.8**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a+b+c=1$, tentukan nilai maksimum dari $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Dari $QM \geq AM$, kita punya

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} \iff \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Jadi, nilai maksimumnya adalah $\boxed{\sqrt{3}}$ di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a=b=c=\frac{1}{3}$.

**Contoh 2.9**

Jika $x$ dan $y$ adalah bilangan riil positif sehingga $xy^2=\frac{1}{2}$, buktikan bahwa $x+y \geq \frac{3}{2}$.

Jika kita langsung menggunakan $AM \geq GM$, maka $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ yang mana kita tidak berhasil mengaitkannya dengan yang diketahui, yaitu $xy^2=\frac{1}{2}$. Kita lakukan sedikit manipulasi, yaitu

$$x+y = x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y \geq 3\sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2}y} = 3\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x=\frac{1}{2}y$. Subtitusi ke $xy^2=\frac{1}{2}$, kita peroleh $\frac{1}{2}y^3=\frac{1}{2} \iff y=1 \iff x=\frac{1}{2}$.

■

Kita dapat perumum sebagai berikut.

**Teorema 2.10** (AM-GM berbobot bilangan asli)

Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bilangan riil positif dan bobot $w_1, w_2, \cdots, w_n$ bilangan asli di mana $B=w_1+w_2+\cdots+w_n$, maka berlaku

$$\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{B} \geq \sqrt[B]{x_1^{w_1}x_2^{w_2}\cdots x_n^{w_n}}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

*Bukti.* Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. □

Dari **Teorema 2.10** dapat diperumum dengan bobot bilangan riil positif, yaitu sebagai berikut.

**Teorema 2.11** (AM-GM berbobot bilangan riil positif)

Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bilangan riil positif dan bobot $w_1, w_2, \cdots, w_n$ bilangan riil positif di mana $B=w_1+w_2+\cdots+w_n$, maka berlaku

$$\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{B} \geq \sqrt[B]{x_1^{w_1}x_2^{w_2}\cdots x_n^{w_n}}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Untuk bukti dari **Teorema 2.11** di luar cakupan materi dan akan dibahas di bagian Ketaksamaan Jensen.

**Contoh 2.12**

Jika $a$ dan $b$ bilangan riil positif sehinga $a+b=1$, buktikan bahwa $a^ab^b+a^bb^a\le 1$.

Dari **Teorema 2.11**,

$$\frac{a(a)+b(b)}{a+b}\ge \sqrt[a+b]{a^ab^b}\iff a^2+b^2\ge a^ab^b.$$

Sekali lagi dengan **Teorema 2.11**,

$$\frac{a(b)+b(a)}{a+b}\ge \sqrt[a+b]{b^aa^b}\iff 2ab\ge a^bb^a.$$

Jumlahkan, diperoleh $a^ab^b+a^bb^a\le a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1$. Kesamaan terjadi ketika $a=b=\frac{1}{2}$. ■

## Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 2.13.** Buktikan **Teorema 2.10**.

**Exercise 2.14.** Lengkapi bukti $AM\ge GM$ dari **Teorema 2.5**.

**Exercise 2.15.** Jika $a,b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a+b+c=1$, buktikan bahwa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$.

**Exercise 2.16.** Jika $a,b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2\ge 2(ab+bc+ca)$.

**Exercise 2.17.** Jika $x$ bilangan riil di mana $x$ tidak berbentuk $\frac{\pi k}{2}$ untuk suatu bilangan bulat $k$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sin^2(x)}+\frac{1}{\cos^2(x)}\ge 4.$$

**Exercise 2.18.** Jika $a,b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a+b+c=2019$, tentukan nilai maksimum dari $\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+2}$.

**Exercise 2.19.** Jika $x$ bilangan riil positif, tentukan nilai minimum dari $x^3+\frac{1}{x}$.

**Exercise 2.20.** Jika $a,b,c$ bilangan riil positif, tentukan nilai maksimum dari $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

**Exercise 2.21.** Tentukan semua pasangan bilangan riil $(a,b,c)$ yang memenuhi

$$a+b+c+2=\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+2\sqrt{c}.$$

# §3 Cauchy Schwarz dan Cauchy Schwarz Engel

Bagian ini telah dibahas secara khusus di sini. Anda dapat membuka link tersebut jika ingin memperdalam secara khusus tentang Cauchy Schwarz dan Cauchy Schwarz Engel.

**Teorema 3.1** (Ketaksamaan Cauchy Schwarz)

Jika $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ bilangan riil, maka berlaku

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i=\lambda b_i$ untuk suatu bilangan riil $\lambda$.

*Bukti.* Tinjau fungsi

$$f(x) = (b_1x - a_1)^2 + (b_2x - a_2)^2 + \cdots + (b_nx - a_n)^2$$

di mana $x$ bilangan riil. Dari ketaksamaan trivial, kita punya $(b_ix - a_i)^2 \geq 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ sehingga berakibat $f(x) \geq 0$ untuk setiap bilangan riil $x$. Kita punya juga

$$f(x) = \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)x + \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

Tinjau bahwa $f(x) \geq 0$ untuk setiap bilangan riil $x$, maka diskriminan dari $f(x)$ haruslah $D \leq 0$. Ingat bahwa diskriminan dari $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ adalah $D = B^2 - 4AC$. Maka $A = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$, $B = -2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$, dan $C = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Kita peroleh

$$0 \geq D = B^2 - 4AC = 4\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2 - 4\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

dan ketaksamaan tersebut dapat disusun menjadi

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $b_ix - a_i = 0 \iff a_i = b_ix$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan suatu bilangan riil $x$ (cukup ganti $x$ sebagai $\lambda$). $\square$

**Contoh 3.2** (AM-HM)

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dari **Teorema 3.1**, kita punya

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}} + \sqrt{a_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_2}} + \cdots + \sqrt{a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_n}}\right)^2 = n^2$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\sqrt{a_i} = \lambda\sqrt{\frac{1}{a_i}} \iff a_i = \lambda$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan suatu bilangan riil positif $\lambda$. Dapat kita simpulkan bahwa $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**Contoh 3.3**

Diberikan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ bilangan riil positif sehingga $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 2$, buktikan bahwa

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdots + n \cdot a_n \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}.$$

Dari **Teorema 3.1**, maka

$$\begin{aligned} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) &\geq (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n)^2 \\ \iff \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot 2 &\geq (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n)^2 \\ \iff \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}} &\geq a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n. \end{aligned}$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \lambda i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan suatu bilangan riil positif $\lambda$. Maka

$$2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda^2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\lambda^2 \implies \lambda = \sqrt{\frac{12}{n(n+1)(2n+1)}}.$$

Demikian kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \sqrt{\frac{12i^2}{n(n+1)(2n+1)}}$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. $\blacksquare$

**Contoh 3.4** (Kasus khusus Ketaksamaan Minkowski)

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ merupakan bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2}.$$

Karena ruas kanan dan ruas kiri dari ketaksamaan masing-masing bernilai riil positif, dengan menguadratkan kedua ruas tidak akan mengubah tanda ketaksamaan. Kita peroleh ketaksamaan menjadi

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} &\geq \sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2 \\
\iff \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} + \sum_{i=1}^n b_i^2 &\geq \sum_{i=1}^n \left(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2\right) \\
\iff \quad 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} &\geq \sum_{i=1}^n 2a_ib_i \\
\iff \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) &\geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2.
\end{aligned}$$

yang jelas benar menurut **Teorema 3.1**. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \lambda b_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan suatu bilangan riil $\lambda$. ■

> **Remark.** Kita tidak membahas lebih detail tentang Ketaksamaan Minkowski. Anda dapat membaca tentang ketaksamaan tersebut di sini.

**Teorema 3.5** (Ketaksamaan Cauchy Schwarz Engel)

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bilangan riil dan $b_1, b_2, \cdots, b_n$ bilangan riil positif, maka berlaku

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \lambda b_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan suatu bilangan riil $\lambda$.

*Bukti.* Subtitusi $a_i := \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ dan $b_i := \sqrt{b_i}$ pada **Teorema 3.1**, kita punya

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &\geq \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \cdot \sqrt{b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \cdot \sqrt{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \cdot \sqrt{b_n}\right)^2 \\
\iff \quad \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) &\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \\
\iff \quad \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.
\end{aligned}$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} = \lambda\sqrt{b_i} \iff a_i = \lambda b_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. □

**Contoh 3.6**

Jika $a, b, c$, dan $d$ bilangan riil positif sehingga $a + b + c + d = 1$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} + \frac{16}{d} \geq 100.$$

Dari **Teorema 3.5**, kita punya

$$\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c}+\frac{4^2}{d}\geq\frac{(1+2+3+4)^2}{a+b+c+d}=100.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\lambda a=1,\lambda b=2,\lambda c=3$, dan $\lambda d=4$. Maka $(a+b+c+d)\lambda=1+2+3+4=10\iff\lambda=10$. Demikian kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{2}{5}\right)$. ■

**Contoh 3.7** (APMO 1991 #3)

Jika $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ bilangan riil positif dan $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, buktikan bahwa

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

Dari **Teorema 3.5**, kita punya

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}&\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n}\\&=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i=(a_i+b_i)\lambda$ untuk setiap $1\leq i\leq n$. Kita punya

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n)\lambda=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)\lambda\iff\lambda=\frac{1}{2}.$$

Maka $a_i=\frac{a_i+b_i}{2}\iff a_i=b_i$ untuk setiap $1\leq i\leq n$. ■

**Contoh 3.8** (Ketaksamaan Nesbit)

Jika $a,b,$ dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Tinjau bahwa

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}.$$

Dari **Teorema 3.5**, kita punya

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc+ab+ac+bc}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Dari **Contoh 1.3**, kita punya $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$. Maka

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}.$$

Kita peroleh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}\implies\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Kesamaan terjadi ketika $a=(ab+ca)\lambda\iff\frac{1}{\lambda}=b+c$. Secara analog, kita dapat juga $\frac{1}{\lambda}=c+a=a+b$ dan dapat disimpulkan bahwa $a=b=c$. ■

## Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 3.9.** Buktikan $AM \geq HM$ dengan **Teorema 3.5**.

**Exercise 3.10.** Buktikan $QM \geq AM$.

**Exercise 3.11.** Jika $P(x)$ adalah polinomial dengan koefisien bilangan riil positif serta jumlah semua koefisiennya adalah 1, buktikan bahwa $P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$ untuk setiap bilangan riil positif $x$.

**Exercise 3.12.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil, buktikan bahwa $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$.

**Exercise 3.13.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif di mana $a+b+c=1$, tentukan nilai maksimum $\sqrt{a+2b}+\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2a}$.

**Exercise 3.14.** Jika $a$ dan $b$ adalah dua bilangan riil, buktikan bahwa $8\left(a^4+b^4\right) \geq (a+b)^4$.

**Exercise 3.15.** Jika $a, b, c$, dan $d$ riil positif dan $a+2b+3c+4d=10$, buktikan bahwa $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{10}{3}$ dan $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{4}{d} \geq 10$.

**Exercise 3.16.** Jika $x, y$, dan $z$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$.

**Exercise 3.17.** Jika $x, y$, dan $z$ bilangan riil tak negatif, buktikan bahwa

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx} \leq 2(x+y+z).$$

# §4 Ketaksamaan Power Mean

Ketaksamaan ini merupakan bentuk yang lebih umum dari ketaksamaan $QM \geq AM$.

**Teorema 4.1** (Ketaksamaan Power Mean)

Diberikan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bilangan riil positif dan definisikan

$$f_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}}.$$

Jika $p$ dan $q$ adalah dua bilangan riil positif di mana $p>q$, maka $f_p \geq f_q$. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Pembuktiannya berada di luar cakupan materi saat ini. Perhatikan pula $f_2 \geq f_1$ menyatakan ketaksamaan $QM \geq AM$.

**Contoh 4.2**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{1}{(a+b)^n}+\frac{1}{(b+c)^n}+\frac{1}{(c+a)^n} \geq 3\left(\frac{3}{2(a+b+c)}\right)^n$$

untuk setiap bilangan asli $n$.

Karena $n \geq 1$, dari **Teorema 4.1** berlaku

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{1}{a+b}\right)^n+\left(\frac{1}{b+c}\right)^n+\left(\frac{1}{c+a}\right)^n}{3}} &\geq \frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{3} \\ \iff \quad \frac{1}{(a+b)^n}+\frac{1}{(b+c)^n}+\frac{1}{(c+a)^n} &\geq \frac{3}{3^n}\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^n. \end{aligned}$$

Dari **Teorema 3.4**, kita punya

$$\frac{1^2}{a+b}+\frac{1^2}{b+c}+\frac{1^2}{c+a}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Maka

$$\frac{3}{3^n}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^n\geq\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{9^n}{2^n(a+b+c)^n}=3\left(\frac{3}{2(a+b+c)}\right)^n.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+a}\iff a=b=c$.

**Contoh 4.3**

Jika $a,b,c$, dan $n$ bilangan riil positif di mana $n\geq 1$, buktikan bahwa

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Misalkan $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, dan $\frac{c}{a}=z$. Maka $xyz=1$ dan sekarang ekuivalen dengan membuktikan $x^n+y^n+z^n\geq x+y+z$. Karena $n\geq 1$, dari **Teorema 4.1** kita punya

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n+z^n}{3}}&\geq\frac{x+y+z}{3}\\ \iff\quad x^n+y^n+z^n&\geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n\\ \iff\quad x^n+y^n+z^n&\geq\frac{(x+y+z)^n}{3^{n-1}}\\ \iff\quad x^n+y^n+z^n&\geq(x+y+z)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Dari $AM\geq GM$, kita punya

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}=1\iff\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1}\geq 1.$$

Kita peroleh bahwa

$$x^n+y^n+z^n\geq(x+y+z)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n-1}\geq x+y+z\implies x^n+y^n+z^n\geq x+y+z$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x=y=z=1\iff a=b=c$. ■

## Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 4.4.** Generalisasi: jika $a_1,a_2,\cdots,a_n,k$ bilangan riil positif sehingga $a_1a_2\cdots a_n=1$ dan $k\geq 1$, buktikan bahwa $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\geq a_1+a_2+\cdots+a_n$.

**Exercise 4.5.** Jika $a,b$, dan $c$ bilangan riil positif dan bilangan asli $n$, buktikan bahwa

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c}{a+b}\right)^n\geq\frac{3}{2^n}.$$

## §5 Ketaksamaan Rearrengement dan Chebyshev

**Teorema 5.1** (Rearrengement)

Misalkan $(a_i)_{i=1}^n$ dan $(b_i)_{i=1}^n$ adalah dua barisan bilangan positif yang merupakan barisan naik atau turun (dengan arah yang sama). Yaitu, berlaku salah satunya: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ dan $b_1 \geq b_2 \geq \cdots b_n$ atau $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ dan $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Maka kita punya

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_nb_{\pi(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

di mana $\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)$ adalah sembarang permutasi dari $1, 2, \cdots, n$.

*Bukti.* W.L.O.G. kedua barisan merupakan barisan naik, yaitu $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ dan $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Akan kita buktikan bahwa

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_nb_{\pi(n)}.$$

Jelas bahwa jika $\pi(i) = i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ ketaksamaan benar. Asumsikan ada $1 \leq i \leq n$ sehingga $\pi(i) \neq i$. Akan kita buktikan dengan induksi.

Untuk $n = 1$ jelas benar. Untuk $n = 2$,

$$\begin{aligned} & x_1y_1 + x_2y_2 && \geq x_1y_2 + x_2y_1 \\ \iff \quad & x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 && \geq 0 \\ \iff \quad & x_1(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) && \geq 0 \\ \iff \quad & (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) && \geq 0 \end{aligned}$$

yang mana benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, maka

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_kb_{\pi(k)}.$$

Akan kita buktikan bahwa untuk $n = k + 1$ juga benar, yaitu:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_kb_{\pi(k)} + a_{k+1}b_{\pi(k+1)}.$$

Terdapat dua kemungkinan: $\pi(k+1) = k+1$ atau $\pi(k+1) < k+1$. Jika $\pi(k+1) = k+1$, ketaksamaan menjadi

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} && \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_kb_{\pi(k)} + a_{k+1}b_{k+1} \\ \iff \quad & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k && \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_kb_{\pi(k)} \end{aligned}$$

yang mana benar menurut hipotesis induksi. Jika $\pi(k+1) = l < k+1$, maka terdapat $1 \leq t \leq k$ sehingga $\pi(t) = k+1$ sehingga kita punya $b_l \leq b_{k+1}$ dan $a_t \leq a_{k+1}$. Maka $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_{\pi(i)}$ mengandung bentuk $a_tb_{\pi(t)} + a_{k+1}b_{\pi(k+1)} = a_tb_{k+1} + a_{k+1}b_l$ yang mungkin bisa dikaitkan dengan $a_tb_l + a_{k+1}b_{k+1}$. Perhatikan bahwa

$$a_tb_{k+1} + a_{k+1}b_l - a_tb_l - a_{k+1}b_{k+1} = a_t\left(b_{k+1} - b_l\right) - a_{k+1}\left(b_{k+1} - b_l\right) = \left(b_{k+1} - b_l\right)\left(a_{k+1} - a_t\right) \leq 0.$$

Maka $a_tb_{k+1} + a_{k+1}b_l \leq a_tb_l + a_{k+1}b_{k+1}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} & 0 && \leq \left(a_{k+1} - a_k\right)\left(b_{k+1} - b_l\right) = a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_l - a_kb_{k+1} + a_kb_l \\ \iff \quad & a_{k+1}b_l + a_kb_{k+1} && \leq a_kb_{k+1} + a_kb_l. \end{aligned}$$

Misalkan barisan $b'_{\pi(1)}, b'_{\pi(2)}, \cdots, b'_{\pi(k+1)}$ merupakan permutasi dari $b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)}, \cdots, b_{\pi(k)}$ sedemikian sehingga $b_{k+1}$ ditukar dengan $b_l$. Dari hipotesis induksi kita bisa peroleh

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_ib_{\pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{k} a_ib_{\pi'(i)} + a_{k+1}b_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k} a_ib_i + a_{k+1}b_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_ib_i.$$

sehingga kita simpulkan bahwa untuk $n = k + 1$ juga benar. Maka menurut induksi terbukti. Bukti $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}$ diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. $\square$

Biasanya ketaksamaan yang menggunakan **Teorema 5.1** yaitu ketaksamaan yang bersifat simetris. Misalkan $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ menyatakan kondisi yang diberikan pada soal. Suatu ketaksamaan dikatakan **simetris** jika setiap permutasi $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, maka $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ tidak akan merubah kondisi soal. Sebagai contoh, misalkan ingin membuktikan: jika $a, b, c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Tuliskan

$$P(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Tinjau setiap permutasi $(a, b, c)$ pada $P(a, b, c)$, yaitu

$$\begin{aligned}
P(a, b, c) &: a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\
P(a, c, b) &: a^2 + c^2 + b^2 \geq ac + cb + ba \\
P(b, a, c) &: b^2 + a^2 + c^2 \geq ba + ac + cb \\
P(b, c, a) &: b^2 + c^2 + a^2 \geq bc + ca + ab \\
P(c, a, b) &: c^2 + a^2 + b^2 \geq ca + ab + bc \\
P(c, b, a) &: c^2 + b^2 + a^2 \geq cb + ba + ac.
\end{aligned}$$

Ternyata, setiap permutasi $(a, b, c)$ pada $P(a, b, c)$ tidak merubah kondisi soal. Maka ketaksamaan ini kita sebut sebagai simetris.

Jika suatu kondisi soal $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ bersifat simetris terhadap $a_1, a_2, \cdots, a_n$, kita bisa W.L.O.G. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

**Contoh 5.2**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Perhatikan bahwa kondisi soal yang diberikan bersifat simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Dari **Teorema 5.1**, maka

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \iff a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

$\blacksquare$

**Contoh 5.3**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Perhatikan bahwa kondisi soal simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Kita punya juga $a^2 \geq b^2 \geq c^2$. Dari **Teorema 5.1** pada $(a, b, c)$ dan $\left(a^2, b^2, c^2\right)$, kita punya

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a \iff a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

$\blacksquare$

**Contoh 5.4** (Ketaksamaan Nesbit)

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Karena kondisi soal simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Kita punya juga $a+b \geq a+c \geq b+c \iff \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$. Dari **Teorema 5.1** pada $(a,b,c)$ dan $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$, maka

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{a+c} + c \cdot \frac{1}{a+b} &\geq a \cdot \frac{1}{a+b} + b \cdot \frac{1}{b+c} + c \cdot \frac{1}{a+c} \\ a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{a+c} + c \cdot \frac{1}{a+b} &\geq a \cdot \frac{1}{a+c} + c \cdot \frac{1}{b+c} + a \cdot \frac{1}{a+c}. \end{aligned}$$

Jumlahkan keduanya didapatkan

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3 \iff \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

■

Berikut salah satu teorema yang merupakan penerapan dari **Teorema 5.1**.

**Teorema 5.5** (Chebyshev)

Diberikan barisan bilangan riil positif $(a_i)_{i=1}^n$ dan $(b_i)_{i=1}^n$ dan memiliki arah urutan yang sama (keduanya barisan naik atau keduanya barisan turun). Maka berlaku

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}.$$

*Bukti.* W.L.O.G. keduanya barisan naik, yaitu $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ dan $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Dari **Teorema 5.1**, kita punya

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\ &\vdots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}. \end{aligned}$$

Jumlahkan semuanya, diperoleh

$$\begin{aligned} & n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right) && \geq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) \\ \iff & \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} && \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}. \end{aligned}$$

Untuk sisi ketaksamaan lainnya dapat dilakukan dengan cara yang sama dan diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. □

**Contoh 5.6**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq (a+b+c)^2$.

Karena ketaksamaan simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Dari **Teorema 5.5** pada $(a,b,c)$ dan $(a,b,c)$, maka

$$\begin{aligned} & \frac{a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c}{3} && \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \\ \iff & 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) && \geq (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

■

**Contoh 5.7**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Karena ketaksamaan simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Maka $a^3 \geq b^3 \geq c^3$ dan $ab \geq ac \geq bc \iff \frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ac} \geq \frac{1}{ab}$. Dari **Teorema 5.5** pada $\left(a^3, b^3, c^3\right)$ dan $\left(\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}\right)$, kita punya

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{1}{3} \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a + b + c}{abc}.$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$. Maka

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\left(\frac{a + b + c}{abc}\right) \geq abc \cdot \frac{a + b + c}{abc} = a + b + c$$

seperti yang ingin dibuktikan. ■

## Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 5.8.** Buktikan $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

**Exercise 5.9.** Buktikan bahwa $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

**Exercise 5.10** (Bentuk Perpangkatan)**.** Jika $a, b, c \geq 1$, buktikan bahwa $a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$.

**Exercise 5.11** (Power Mean)**.** Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$ dan $k$ bilangan asli, buktikan bahwa $f_k \geq f_1$.

**Exercise 5.12.** Jika $a \geq b \geq c \geq 0$ dan $0 \leq x \leq y \leq z$, buktikan bahwa

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3\left(\frac{a + b + c}{x + y + z}\right).$$

# §6 Strategi Lainnya

## §6.1 Homogenisasi dan Normalisasi

Misalkan kita ingin membuktikan ketaksamaan

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

di mana $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Misalkan pula $abc = k^3$. Subtitusi $a = kx, b = ky$, dan $c = kz$. Maka

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \iff k^3x^3 + k^3y^3 + k^3z^3 \geq 3k^3xyz \iff x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

yang mana hal ini tidak berbeda dengaan bentuk soal. Maka ketaksamaan tersebut dikatakan **homogen**. Dari sini, kita bisa punya $k^3 = kx \cdot ky \cdot kz = k^3xyz \iff xyz = 1$. Dalam hal ini, kita tinggal membuktikan $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3$. Dengan kata lain, untuk membuktikan $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ dan karena ketaksamaan tersebut homogen kita bisa **normalisasi** dengan W.L.O.G. $abc = 1$. Kita juga bisa **normalisasi** dengan W.L.O.G. $a + b + c = 1$ atau $ab + bc + ca = 1$ atau yang lainnya tergantung kondisi apa yang diinginkan.

Kebalikan dari normalisasi, apabila $abc = 1$, kita bisa subtitusi $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Apabila $1 = 2abc + a + b + c$, kita bisa subtitusi $a = \frac{x}{x+y}, b = \frac{y}{y+z}, c = \frac{z}{z+x}$. Kita dapat melakukan subtitusi yang lain tergantung dengan kondisi yang diberikan. Berikut beberapa substitusi yang dapat dilakukan dengan beberapa kondisi yang diberikan.

1. Jika $abc = 1$, maka pasti terdapat $x, y, z$ sehingga $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$, dan $c = \frac{z}{x}$.
2. Jika $a + b + c = abc$, maka terdapat $A, B$, dan $C$ sehingga $A + B + C = \pi$ dan $A = \tan a, B = \tan B$, dan $C = \tan C$.
3. Jika $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, maka terdapat $A, B$, dan $C$ sehingga $A + B + C = \pi$ dan $x = \cos A, y = \cos B$, dan $z = \cos C$.
4. Jika $a + b + c + 2 = abc$, maka terdapat $x, y$, dan $z$ sehingga $a = \frac{x+y}{z}, b = \frac{y+z}{x}$, dan $c = \frac{z+x}{y}$.
5. Jika $x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4$ dan $x, y, z \geq 2$, maka terdapat $a, b$, dan $c$ sehingga $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, y = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, dan $z = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$.
6. Jika $xy + yz + zx + 2xyz = 1$, maka terdapat $a, b$, dan $c$ sehingga $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{a+c}$, dan $z = \frac{c}{a+b}$.

**Contoh 6.1**

Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a+b}{2c^2} + \frac{b+c}{2a^2} + \frac{c+b}{2a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Perhatikan bahwa ketaksamaan tersebut homogen. W.L.O.G. $abc = 1$. Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} \frac{a}{c^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{c}{a^2} + \frac{b}{a^2} &\geq 2bc + 2ca + 2abc \\ \iff \quad a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) &\geq 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{bc} = 2a \iff a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 2a^2.$$

Secara analog, kita punya

$$a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Dari **Contoh 1.3**, kita punya $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$. Maka

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

seperti yang ingin dibuktikan. ■

## §6.2 Bongkar!

Metode ini bisa menjadi solusi ketika tidak mendapatkan ide apapun untuk menyelesaikan ketaksamaan. Dengan membongkar ketaksamaan bisa jadi dapat memudahkan kita dalam menyelesaikan ketaksamaan. Perhatikan contoh berikut.

**Contoh 6.2**

Jika $x, y$, dan $z$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\left(x^3 + 1\right)\left(y^3 + 1\right)\left(z^3 + 1\right) \geq (xyz + 1)^3.$$

Bagi yang sudah mengetahui **Ketaksamaan Holder**, ketaksamaan tersebut mudah untuk dibuktikan. Bagaimana jika kita tidak tahu bagaimana mengolah ketaksamaan tersebut? Bongkar! Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} x^3y^3z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3+y^3+z^3+1 &\geq x^3y^3z^3+3x^2y^2z^2+3xyz+1 \\ \iff \quad x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3+y^3+z^3 &\geq 3x^2y^2z^2+3xyz. \end{aligned}$$

Sepertinya (mungkin) lebih mudah ditebak. Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2 \quad \text{dan} \quad x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Terkadang bentuk ketaksamaan yang ingin kita bongkar cukup jelek dan melelahkan. Memang kesabaran, ketelitian, dan percaya diri bisa menjadi kunci untuk membongkar suatu bentuk yang cukup jelek.

## §6.3 Analisis Kasus Kesamaan

**Contoh 6.3**

Jika $x$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$x^2+3x+\frac{1}{x} \geq \frac{15}{4}.$$

Akan kita gunakan $AM \geq GM$. Jika kita langsung menggunakan $AM \geq GM$ didapatkan

$$x^2+3x+\frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{x}} = 9x$$

yang tidak sesuai dengan yang ingin dibuktikan. Maka kita perlu mengolah ruas kiri pada ketaksamaan. Kita ganti strategi, menggunakan **Teorema 2.10**. Maka

$$\begin{aligned} x^2+3x+\frac{1}{x} = a\left(\frac{x^2}{a}\right)+b\left(\frac{3x}{b}\right)+c\left(\frac{1}{cx}\right) &\geq (a+b+c)\sqrt[a+b+c]{\left(\frac{x^2}{a}\right)^a\left(\frac{3x}{b}\right)^b\left(\frac{1}{cx}\right)^c} \\ \iff \quad x^2+3x+\frac{1}{x} &\geq (a+b+c)\sqrt[a+b+c]{\frac{3^b}{a^ab^bc^c}\cdot x^{2a+b-c}} \end{aligned}$$

di mana $a, b$, dan $c$ bilangan asli. Untuk menghilangkan variabel $x$, kita harus punya $2a+b-c=0 \iff 2a+b=c$. Kasus kesamaan terjadi jika dan hanya jika

$$\frac{x^2}{a}=\frac{3x}{b}=\frac{1}{cx}.$$

Tinjau bahwa kasus kesamaan dapat terjadi ketika $x=\frac{1}{2}$ karena $x^2+3x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{15}{4}$. Secara instuisi, kita harus punya

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{b}=\frac{1}{c\cdot\frac{1}{2}} \iff \frac{1}{4a}=\frac{3}{2b}=\frac{2}{c} \iff (a,b,c)=(a,6a,8a).$$

Cek ke kondisi $2a+b=c$, ternyata selalu benar untuk setiap $a$. W.L.O.G. $a=1$, kita peroleh $b=6$ dan $c=8$. Maka dari itu kita dapat terapkan **Teorema 2.10** sebagai berikut (di lembar jawaban): Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$x^2+6\left(\frac{x}{2}\right)+8\left(\frac{1}{8x}\right) \geq 15\sqrt[15]{x^2\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(\frac{1}{8x}\right)^8} = 15\sqrt[15]{x^2\cdot\frac{x^6}{2^6}\cdot\frac{1}{8^8x^8}} = 15\sqrt[15]{\frac{1}{2^{30}}} = \frac{15}{4}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x=\frac{1}{2}$.

Memang ini terlihat seperti ide dari langit karena motivasi awal melakukan ketaksamaan $AM \geq GM$ tersebut dengan melihat kasus kesamaannya kapan.

## §6.4 Subtitusi Ravi

**Contoh 6.4**

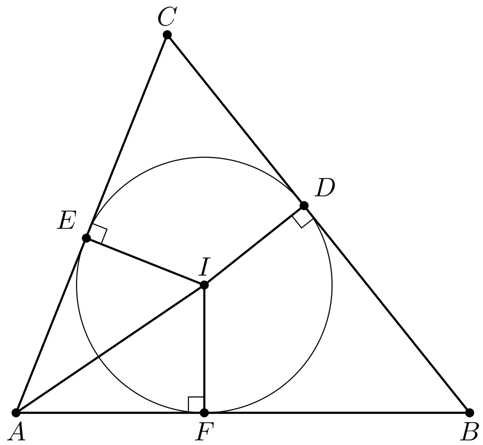
Jika $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi segitiga, buktikan bahwa

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Karena $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi suatu segitiga, maka harus memenuhi ketaksamaan $a+b > c, b+c > a$, dan $c+a > b$. Untuk mengabaikan ketaksamaan tersebut, kita dapat substitusi $a = x+y, b = y+z$, dan $c = z+x$ untuk suatu bilangan riil positif $x, y$, dan $z$. Hal ini akan berakibat $a+b > c \iff x+2y+z > z+x \iff 2y > 0$ yang mana selalu benar, analog untuk lainnya.

Akan kita buktikan bahwa jika $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi segitiga, maka pasti terdapat bilangan riil positif $x, y$, dan $z$ sehingga $a = x+y, b = y+z$, dan $c = z+x$.

*Bukti.* Tinjau segitiga $ABC$ di mana panjang $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, dan $\overline{AB} = c$. Misalkan lingkaran dalam $\triangle ABC$ menyinggung $\overline{BC}, \overline{CA}$, dan $\overline{AB}$ berturut-turut di titik $D, E$, dan $F$.




Perhatikan $\triangle IAF$, dari Teorema Pythagoras kita punya $AF^2 = \sqrt{AI^2 - IF^2} = \sqrt{AI^2 - r^2}$. Dari $\triangle IAE$, dari Teorema Pythagoras kita punya $AE^2 = \sqrt{AI^2 - IE^2} = \sqrt{AI^2 - r^2}$. Maka $AF^2 = AE^2 \iff AE = AF = z$. Dengan cara yang sama, kita bisa peroleh $BF = BD = x$ dan $CD = CE = y$. Maka kita punya $a = x+y, b = y+z$, dan $c = z+x$ seperti yang ingin dibuktikan. □

Kembali ke **Contoh 6.2**, dengan substitusi $a = x+y, b = y+z$, dan $c = z+x$ untuk suatu bilangan riil positif $x, y, z$, ketaksamaan ekuivalen dengan $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ yang mana benar menurut $AM \geq GM$. ■

### Soal untuk Bagian Ini

**Exercise 6.5.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$. Maka W.L.O.G. $a+b+c = 1$. Apakah hal ini dibenarkan? Jika W.L.O.G. $a \geq b \geq c$, apakah hal ini dibenarkan juga?

**Exercise 6.6.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Maka W.L.O.G. $abcde = 1$. Apakah hal ini dibenarkan? Jiak W.L.O.G. $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, apakah hal ini dibenarkan juga?

**Exercise 6.7** (IMO 1964)**.** Jika $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi segitiga, buktikan bahwa

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

# §7 Contoh Soal yang Lebih Menantang

Demi penyingkatan penulisan, kita definisikan

$$\sum_{\text{cyc}} f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) + f(a_n, a_1, \cdots, a_{n-1}) + f(a_{n-1}, a_n, \cdots, a_{n-2}) + \cdots + f(a_2, a_3, , \cdots, a_1)$$

sebagai penjumlahan semua $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ untuk setiap permutasi siklis $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Sebagai contoh, jika $f(a, b, c) = a^2 b^1 c^0$, maka

$$\sum_{\text{cyc}} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(c, a, b) + f(b, c, a) = a^2 b^1 c^0 + c^2 a^1 b^0 + b^2 c^1 a^0 = a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

## §7.1 USAMO 2018 #1

**Contoh 7.1** (USAMO 2018 #1)

Misalkan $a, b$, dan $c$ adalah bilangan riil positif sehingga $a + b + c = 4\sqrt[3]{abc}$. Buktikan bahwa

$$2(ab + bc + ca) + 4 \min\left(a^2, b^2, c^2\right) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Perhatikan bahwa ketaksamaan tersebut simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Maka ketaksamaan ekuivalen dengan

$$2(ab + bc + ca) + 4c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \iff 2(ab + bc + ca) + 3c^2 \geq a^2 + b^2.$$

Perhatikan bahwa kondisi soal yang diberikan adalah

$$P(a, b, c) = \begin{cases} a + b + c = 4\sqrt[3]{abc} \\ 2(ab + bc + ca) + 3c^2 \geq a^2 + b^2 \end{cases}.$$

Apabila kita subsitusi $(a, b, c) = (kx, ky, kz)$, kondisi soal yang diberikan menjadi

$$\begin{aligned} P(kx, ky, kz) &= \begin{cases} kx + ky + kz = 4\sqrt[3]{k^3 xyz} \\ 2\left(k^2 xy + k^2 yz + k^2 zx\right) + 3k^2 z^2 \geq k^2 x^2 + k^2 y^2 \end{cases} \\ \iff \quad P(kx, ky, kz) &= \begin{cases} x + y + z = 4\sqrt[3]{xyz} \\ 2(xy + yz + zx) + 3z^2 \geq x^2 + y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

yang mana tidak merubah kondisi soal awal. Maka kondisi soal tersebut bersifat homogen. W.L.O.G. $abc = 1$. Maka $a + b + c = 4$. Perhatikan bahwa ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} & 2(ab + bc + ca) + 3c^2 && \geq a^2 + b^2 \\ \iff \quad & 2ab + 2c(a + b) + 3c^2 && \geq a^2 + b^2 \\ \iff \quad & 4ab + 2c(4 - c) + 3c^2 && \geq (a + b)^2 \\ \iff \quad & 4ab + 8c - 2c^2 + 3c^2 && \geq (4 - c)^2 \\ \iff \quad & 4ab + c^2 + 8c && \geq 16 - 8c + c^2 \\ \iff \quad & 4ab + 16c && \geq 16 \\ \iff \quad & ab + 4c && \geq 4 \\ \iff \quad & \frac{1}{c} + 4c && \geq 4 \end{aligned}$$

yang jelas benar menurut $AM \geq GM$. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $4c = \frac{1}{c} \iff c = \frac{1}{2}$. Maka $a + b = \frac{7}{2}$ dan $ab = 2$. Misalkan $a, b$ adalah akar-akar dari persamaan kuadrat variabel $X$, yaitu

$$0 = X^2 - (a + b)X + AB = X^2 - \frac{7}{2}X + 2 \iff X = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Maka $\{a,b\} = \left\{\frac{7+\sqrt{17}}{4}, \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right\}$. Kita bisa simpulkan ketaksamaan terjadi ketika $(a,b,c) = \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}k, \frac{7-\sqrt{17}}{4}k, \frac{k}{2}\right)$ dan permutasinya untuk suatu bilangan riil positif $k$. Ganti saja $k$ dengan $2k$ untuk menyederhanakannya, diperoleh $(a,b,c) = \left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}k, \frac{7-\sqrt{17}}{2}k, k\right)$ untuk suatu bilangan riil positif $k$. Untuk menuliskannya pada lembar jawaban, lakukan cara sebaliknya seperti contoh solusi berikut.

*Contoh Solusi.* Karena kondisi soal homogen, W.L.O.G. $abc = 1 \iff a+b+c = 4$. Karena simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$ dan ketaksamaan soal ekuivalen dengan

$$2(ab+bc+ca) + 4c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\begin{aligned} 4c + \frac{1}{c} &\geq 2\sqrt{4c \cdot \frac{1}{c}} = 4 \\ \iff \quad 16c + 4ab &\geq 16 \\ \iff \quad 4ab + c^2 + 8c &\geq 16 - 8c + c^2 \\ \iff \quad 4ab + 8c - 2c^2 + 3c^2 &\geq (4-c)^2 \\ \iff \quad 4ab + 2c(4-c) + 3c^2 &\geq (a+b)^2 \\ \iff \quad 4ab + 2c(a+b) + 3c^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 \\ \iff \quad 2(ab+bc+ca) + 4c^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(a,b,c) = \left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}k, \frac{7-\sqrt{17}}{2}k, k\right)$ dan permutasinya untuk suatu bilangan riil positif $k$. ■

## §7.2 KSN 2021 #4

**Contoh 7.2** (KSN 2021 #4, Muhammad Afifurrahman)

Diberikan $x, y$, dan $z$ bilangan riil positif sehingga $x+y+z = 3$. Buktikan bahwa

$$2\sqrt{x+\sqrt{y}} + 2\sqrt{y+\sqrt{z}} + 2\sqrt{z+\sqrt{x}} \leq \sqrt{8+x-y} + \sqrt{8+y-z} + \sqrt{8+z-x}.$$

Soal ini memberikan saya pengalaman yang tak terlupakan ketika KSN 2021. Karena 5 menit terakhir saya masih belum berhasil menyelesaikan soal tersebut dan sudah berniat untuk *nyampah* (ngawur). Dari menulis secara *random* secara tidak sengaja menyelesaikan soal tersebut.

Melihat bentuk akar di dalam akar, saya seperti "uh sepertinya bentuk akar ini harus dihilangkan". Dari $AM \geq GM$, kita punya $\frac{y+1}{2} \geq \sqrt{y}$. Secara analog, kita punya

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+\sqrt{y}} + 2\sqrt{y+\sqrt{z}} + 2\sqrt{z+\sqrt{x}} &\leq 2\sqrt{x + \frac{y+1}{2}} + 2\sqrt{y + \frac{z+1}{2}} + 2\sqrt{z + \frac{x+1}{2}} \\ &= \sqrt{4x+2y+2} + \sqrt{4y+2z+2} + \sqrt{4z+2x+2}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$4x + 2y + 2 = 4x + 2(3-x-z) + 2 = 4x + 6 - 2x - 2z + 2 = 8 + 2x - 2z.$$

Maka

$$2\sqrt{x+\sqrt{y}} + 2\sqrt{y+\sqrt{z}} + 2\sqrt{z+\sqrt{x}} \leq \sqrt{8+2x-2z} + \sqrt{8+2y-2x} + \sqrt{8+2z-2y}.$$

Sekarang akan kita buktikan bahwa

$$\sqrt{8+2x-2z} + \sqrt{8+2y-2x} + \sqrt{8+2z-2y} \leq \sqrt{8+x-y} + \sqrt{8+y-z} + \sqrt{8+z-x}.$$

Hmm bentuk $(8+2x-2z), (8+2z-2y)$, dan $8+x-y$ cukup mencurigakan sehingga saya rasa ini menggunakan $QM \geq AM$ setiap dua suku. Dari $QM \geq AM$, kita punya

$$\frac{\sqrt{8+2x-2z}+\sqrt{8+2z-2y}}{2} \leq \sqrt{\frac{8+2x-2z+8+2z-2y}{2}} = \sqrt{8+x-y}.$$

Secara analog, kita punya

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8+2y-2x}+\sqrt{8+2x-2z}}{2} &\leq \sqrt{8+y-z}\\ \frac{\sqrt{8+2y-2x}+\sqrt{8+2z-2y}}{2} &\leq \sqrt{8+z-x}.\end{aligned}$$

Jumlahkan semuanya, kita dapatkan seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x=y=z=1$.

*Contoh Solusi.* Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} 2\sqrt{x+\sqrt{y}} \leq \sum_{\text{cyc}} 2\sqrt{x+\frac{y+1}{2}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{4x+2y+2}.$$

Perhatikan bahwa $4x+2y+2 = 4x+2(3-x-z)+2 = 8+2x-2z$. Dari $QM \geq AM$, kita punya

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \frac{\sqrt{8+2x-2z}+\sqrt{8+2y-2x}}{2} &\leq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{8+2x-2z+8+2y-2x}{2}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{8+x-y}\\ \iff \sum_{\text{cyc}} \sqrt{8+2x-2z} &\leq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{8+x-y}.\end{aligned}$$

Kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} 2\sqrt{x+\sqrt{y}} \leq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{4x+2y+2} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{8+2x-2z} \leq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{8+x-y}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x=y=z=1$. ■

## §7.3 Hongkong 2013 #1

**Contoh 7.3** (Hongkong 2013 #1)

Jika $a, b$, dan $c$ adalah bilangan riil positif sehingga $ab+bc+ca=1$, buktikan bahwa

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6\sqrt{3}b}+\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b}+6\sqrt{3}c}+\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c}+6\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Kita coba analisis kesamaan. Uji untuk $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ternyata kesamaan terpenuhi. Maka kita harus mengolah ketaksamaan tersebut dengan menghasilkan kasus kesamaan $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tinjau bahwa

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6b\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}(1+6ab)}.$$

Mudah ditinjau $\frac{\sqrt{3}}{a}=3$ dan $1+6ab=3$ ketika $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Untuk menghilangkan bentuk akar pangkat 4, kemungkinan kita memanfaatkan bentuk ketaksamaan $AM \geq GM$ empat suku. Tinjau dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{3+3+\frac{\sqrt{3}}{a}+(1+6ab)}{4} \geq \sqrt[4]{3\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{a}(1+6ab)} \iff \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}(1+6ab)} \leq \frac{6ab+\frac{\sqrt{3}}{a}+7}{4\sqrt{3}}.$$

Secara analog, kita punya

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6\sqrt{3}b}+\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b}+6\sqrt{3}c}+\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c}+6\sqrt{3}a} &\leq \frac{6ab+\frac{\sqrt{3}}{a}+7}{4\sqrt{3}}+\frac{6bc+\frac{\sqrt{3}}{b}+7}{4\sqrt{3}}+\frac{6ca+\frac{\sqrt{3}}{c}+7}{4\sqrt{3}}\\ &= \frac{6(ab+bc+ca)+\frac{ab+bc+ca}{abc}\sqrt{3}+21}{4\sqrt{3}}\\ &= \frac{6+\frac{\sqrt{3}}{abc}+21}{4\sqrt{3}}\\ &= \frac{27abc+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \iff \frac{\sqrt{3}}{9} \geq abc.$$

Maka

$$\frac{27abc+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} \leq \frac{27\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} = \frac{1}{abc}$$

dan kita peroleh seperti yang ingin dibuktikan.

*Contoh Solusi.* Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6b\sqrt{3}} = \sum_{\text{cyc}}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}(1+6ab)} = \sqrt[4]{\frac{\frac{\sqrt{3}}{a}(1+6ab)\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3}} \leq \sum_{\text{cyc}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{a}+(1+6ab)+3+3}{4\sqrt{3}}$$

yang ekuivalen pula dengan

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6b\sqrt{3}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt{3}+6(ab+bc+ca)+21}{4\sqrt{3}} = \frac{\frac{ab+bc+ca}{abc}\sqrt{3}+27}{4\sqrt{3}} = \frac{27abc+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}}.$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \iff abc \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a}+6b\sqrt{3}} \leq \frac{27abc+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} \leq \frac{27\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}}{4abc\sqrt{3}} = \frac{1}{abc}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. ∎

## §7.4 Korea 2016 #4

**Contoh 7.4** (Korea 2016 #4)

Jika $x, y$, dan $z$ bilangan riil sehingga $x^2+y^2+z^2=1$, tentukan nilai maksimum yang mungkin dari

$$\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right).$$

Jika kita subtitusi $(x,y,z)=(kp,kq,kr)$,

$$\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right) = k^6\left(p^2-qr\right)\left(q^2-rp\right)\left(r^2-pq\right).$$

Untuk mengaitkannya dengan $x^2+y^2+z^2=1$ dan menghilangkan bentuk $k^6$, maka saya klaim bahwa

$$\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right) \leq M\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$$

untuk suatu bilangan riil $M$. Dengan mencoba banyak kemungkinan $(x,y,z)$, saya memperoleh nilai $M$ terbesar yang mungkin adalah $\frac{1}{8}$. Sekarang, saya klaim bahwa

$$\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right) \leq \frac{1}{8}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3.$$

Karena terdapat bentuk $x^2, y^2, z^2, xy, yz,$ dan $zx$, saya memiliki ide dengan memisalkan *symmetric elementary sum*, yaitu $a = x + y + z, b = xy + yz + zx$, dan $c = xyz$. Mudah ditinjau $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$. Bongkar ruas kiri ketaksamaan, yaitu

$$\left(x^2 - yz\right)\left(y^2 - zx\right)\left(z^2 - xy\right) = xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right).$$

Kita gunakan $(p+q+r)^3 = p^3+q^3+r^3+3(p+q+r)(pq+qr+rp)-3pqr$. Kita punya $x^3+y^3+z^3 = a^3-3ab+3c$. Kita punya juga

$$\begin{aligned}(xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3 &= (xy+yz+zx)^3 - 3(xy+yz+zx)\left(xy^2z + xyz^2 + x^2yz\right) + 3x^2y^2z^2 \\ &= (xy+yz+zx)^3 - 3xyz(xy+yz+zx)(x+y+z) + 3(xyz)^2 \\ &= b^3 - 3abc + 3c^2.\end{aligned}$$

Kita dapatkan

$$\begin{aligned}\left(x^2 - yz\right)\left(y^2 - zx\right)\left(z^2 - xy\right) &= xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right) \\ &= c\left(a^3 - 3ab + 3c\right) - \left(b^3 - 3abc + 3c^2\right) \\ &= a^3c - 3abc + 3c^2 - b^3 + 3abc - 3c^3 \\ &= a^3c - b^3.\end{aligned}$$

Sekarang ekuivalen dengan membuktikan $a^3c - b^3 \leq \frac{1}{8}\left(a^2 - 2b\right)^3$. Bongkar sekali lagi diperoleh

$$\begin{aligned} & 8\left(a^3c - b^3\right) && \leq a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3 \\ \iff & 0 && \leq a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8a^3c \\ \iff & 0 && \leq a^2\left(a^4 - 6a^2b + 12b^2 - 8ac\right).\end{aligned}$$

Karena $a^2 \geq 0$, sekarang ekuivalen dengan membuktikan $a^4 - 6a^2b + 12b^2 - 8ac \geq 0$. Tinjau bahwa

$$a^4 - 6a^2b + 12b^2 - 8ac = \left(a^2 - 3b\right)^2 + 3b^2 - 8ac.$$

Sekarang ekuivalen dengan membuktikan $3b^2 - 8ac \geq 0$. Maka

$$\begin{aligned} & 3b^2 - 8ac && \geq 0 \\ \iff & 3(xy+yz+zx)^2 - 8xyz(x+y+z) && \geq 0 \\ \iff & 3\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz\right) - 8x^2yz - 8xy^2 - 8xyz^2 && \geq 0 \\ \iff & 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 && \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2.\end{aligned}$$

Dari **Contoh 1.3**, kita punya $(xy)^2 + (yz)^2(zx)^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$. Sehingga kita peroleh

$$3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 = 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2$$

karena $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 0$ menurut ketaksamaan tirival. Kita dapat seperti yang ingin dibuktikan. Kesaman terjadi jika dan hanya jika $(x, y, z) = (x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ dan permutasinya.

*Contoh Solusi.* Nilai maksimumnya adalah $\boxed{\frac{1}{8}}$. Kita klaim bahwa

$$8\left(x^2 - yz\right)\left(y^2 - zx\right)\left(z^2 - xy\right) \leq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3.$$

Misalkan $a = x + y + z, b = xy + yz + zx$, dan $c = xyz$. Tinjau $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$. Kita punya

$$\begin{aligned}\left(x^2 - yz\right)\left(y^2 - zx\right)\left(z^2 - xy\right) &= a^3c - b^3 \\ \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 &= a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3 - 8\left(a^3c - b^3\right) &= a^2\left(a^4 - 6a^2b + 12b^2 - 8ac\right)\\ &= a^2\left((a-3b)^2 + 3b^2 - 8ac\right).\end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}3b^2 - 8ac &= 3(xy+yz+zx)^2 - 8(x+y+z)xyz\\ &= 3(xy)^2 + 3(yz)^2 + 3(zx)^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2.\\ &= 3(xy)^2 + 3(yz)^2 + 3(zx)^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2.\end{aligned}$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\left((xy)^2 + (yz)^2\right) \geq \sum_{\text{cyc}} 2xy^2z \iff \sum_{\text{cyc}} 3(xy)^2 - \sum_{\text{cyc}} 2x^2yz \geq \sum_{\text{cyc}} (xy)^2 \geq 0.$$

Kita punya $3b^2 - 8ac \geq 0$. Karena $a^2 \geq 0$, kita punya

$$\begin{aligned}& a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3 - 8\left(a^3c - b^3\right) && \geq 0\\ \iff & \left(a^2 - 2b\right)^3 && \geq 8\left(a^3c - b^3\right)\\ \iff & \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 && \geq 8\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right)\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\left(x^2-yz\right)\left(y^2-zx\right)\left(z^2-xy\right) \leq \frac{1}{8}$ dan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ dan permutasinya. ■

# §8 Latihan Soal

Soal belum tentu urut berdasarkan tingkat kesulitan. Have fun!

**Problem 8.1** (OSP 2003)**.** Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.

**Problem 8.2** (Canada 1971)**.** Diketahui bahwa $x$ dan $y$ adalah bilangan riil positif yang memenuhi $x + y = 1$. Buktikan bahwa

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

**Problem 8.3.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a + b + c = 1$, buktikan bahwa

$$a^b b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$$

**Problem 8.4.** Tentukan semua penyelesaian bilangan riil $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ di mana $n \geq 2$ yang memenuhi sistem persamaan ⋆

$$\frac{4a_1^2}{4a_1^2+1} = a_2, \quad \frac{4a_2^2}{4a_2^2+1} = a_3, \quad \frac{4a_3^2}{4a_3^2+1} = a_4, \quad \cdots, \quad \frac{4a_n^2}{4a_n^2+1} = a_1.$$

**Problem 8.5.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a + b + c = 1$, buktikan bahwa

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc}.$$

**Problem 8.6** (KTOM Juni 2021 #2)**.** Misalkan $a, b$, dan $c$ adalah bilangan riil non-negatif yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Buktikan bahwa

$$1 \leq a + b + c + ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{3}.$$

Tentukan juga kapan berlaku kesamaan $1 = a + b + c + ab + bc + ca$ dan $1 + \sqrt{3} = a + b + c + ab + bc + ca$.

**Problem 8.7** (Baltic Way 2000)**.** Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan riil positif $a, b, c$ berlaku ⋆

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

**Problem 8.8** (OSN 2012 #2/IMO 2012 #2)**.** Misalkan $n \geq 3$ bilangan bulat, dan bilangan riil positif $a_2, a_3, \cdots, a_n$ sehingga $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan bahwa

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**Problem 8.9** (JBMO 2014 #3)**.** Untuk sembarang bilangan riil positif $a, b$, dan $c$ dengan $abc = 1$, buktikan bahwa ⋆

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

**Problem 8.10.** Misalkan $a, b$, dan $c$ adalah bilangan-bilangan riil yang nilai mutlaknya tidak lebih besar dari 1. Buktikan bahwa

$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} \leq 2 + \sqrt{2}.$$

**Problem 8.11.** Misalkan $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi segitiga. Buktikan bahwa

$$\sqrt{3\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right)} \geq \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}.$$

**Problem 8.12.** Jika $a, b$, dan $c$ merupakan bilangan riil positif sehingga $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, buktikan bahwa

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

**Problem 8.13** (IMO 1995 #2)**.** Jika $a, b, c$ merupakan bilangan riil positif sehingga $abc = 1$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Problem 8.14** (Yunani 2007 #2)**.** Jika $a, b$, dan $c$ merupakan panjang sisi segitiga, buktikan bahwa ⋆

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab + bc + ca.$$

**Problem 8.15** (USAMO 1997 #2)**.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

**Problem 8.16** (KTOM Januari 2021 #3)**.** Buktikan bahwa untuk setiap bilangan riil positif $a, b$, dan $c$ dengan $abc = 1$ dan $ab + bc + ca = 2021$, berlaku pertidaksamaan

$$\left(a^7 + 2\right)\left(b^7 + 2\right)\left(c^7 + 2\right) > 4(a + b + c) + 4051.$$

**Problem 8.17** (Nguyen Viet Hung)**.** Untuk sembarang bilangan riil positif $a, b$, dan $c$, buktikan bahwa ⋆

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \geq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

**Problem 8.18** (IZHO 2008 #3)**.** Misalkan $a, b$, dan $c$ adalah tiga bilangan riil positif sehingga $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Problem 8.19** (OSN 2015 #3)**.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa ⋆

$$\sqrt{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}} \geq 3.$$

**Problem 8.20** (USAMO 2004 #2)**.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif, buktikan bahwa

$$\left(a^5 - a^2 + 3\right)\left(b^5 - b^2 + 3\right)\left(c^5 - c^2 + 3\right) \geq (a + b + c)^3.$$

**Problem 8.21.** Jika $a, b$, dan $c$ bilangan riil positif sehingga $a + b + c = 3$, buktikan bahwa

$$\sqrt{a + \sqrt{b^2 + c^2}} + \sqrt{b + \sqrt{c^2 + a^2}} + \sqrt{c + \sqrt{a^2 + b^2}} \geq 3\sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

**Problem 8.22** (Wildan Bagus W.)**.** Diberikan sembarang bilangan riil positif $a, b$, dan $c$ yang memenuhi $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{(bc+1)a^k}{b+c} + \frac{(ca+1)b^k}{c+a} + \frac{(ab+1)c^k}{a+b} \geq a + b + c$$

untuk setiap bilangan asli $k > 2$. ⋆

**Problem 8.23** (USAMO 2021 #2)**.** Misalkan $n \geq 4$ bilangan bulat. Tentukan semua penyelesaian bilangan riil positif dari $2n$ sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3, \\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5, \\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7 \\
&\vdots & &\vdots \\
a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1
\end{aligned}$$

**Problem 8.24** (IMO 2021 #2)**.** Jika $a, b, c$, dan $d$ bilangan riil sehingga $a \geq b \geq c \geq d > 0$ dan $a+b+c+d = 1$, buktikan bahwa

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

# §9 Hint

**8.1.** Tinjau $999! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999$.

**8.2.** Bongkar dan $AM \geq GM$.

**8.3.** **Teorema 2.11**.

**8.4.** Apabila $x > 0$, maka $4x^2 + 1 \geq 4x \iff \frac{4x^2}{4x^2+1} \leq x$.

**8.5.** Ekuivalen dengan membuktikan $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abc$. Gunakan $AM \geq GM$ tiap dua suku.

**8.6.** Tinjau $(a+b+c)^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2(ab+bc+ca)$ dan batas atas dapat dicari dengan mudah. Buktikan bahwa $ab + bc + ca \geq 0$ dengan meninjau kasus ada yang bernilai 0 di antara $a, b$, dan $c$.

**8.7.** Dapat dibuktikan dengan interpretasi geometri dengan meninjau $ac = 2ac \cos \frac{\pi}{3}$.

**8.8.** Tinjau bahwa $1 + a_i = 1 + (i-1) \cdot \frac{a_i}{i-1}$.

**8.9.** Tinjau $ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$.

**8.10.** Tinjau ketaksamaan simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Gunakan hasil $2\left(x^2 + y^2\right) \geq (x+y)^2$.

**8.11.** Substitusi ravi dan gunakan **Teorema 3.1** untuk $\sqrt{ab}$.

**8.12.** Tinjau $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a^2-bc+1} = \frac{a^2}{a^3-abc+a}$ dan **Teorema 3.5**. Apa bentuk yang ekuivalen dengan $a^3+b^3+c^3-3abc$?

**8.13.** Tinjau $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3(b+c)} = \sum_{\text{cyc}} \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{b+c}{bc}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

**8.14.** Substitusi ravi dan **Teorema 3.5**.

**8.15.** Buktikan bahwa $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$.

**8.16.** Bongkar dan ruas kiri ekuivalen dengan $9 + \sum_{\text{cyc}} \frac{2}{a^7} + 4a^7$. Gunakan **Teorema 4.1**.

**8.17.** Bongkar saja dan ekuivalen dengan membuktikan $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3 \geq 2a^3bc+2ab^3c+2abc^3$ yang cukup mudah dengan $AM \geq GM$.

**8.18.** Substitusi $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ dan tinjau bahwa $\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{y^2+zx} \geq \frac{2x^2}{2y^2+x^2+z^2}$.

**8.19.** Ekuivalen dengan membuktikan $\prod_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}\right) \geq 1$ dan gunakan **Teorema 5.5**.

**8.20.** Buktikan bahwa $a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2$.

**8.21.** Kuadratkan kedua ruas dan ekuivalen dengan membuktikan $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{b^2+c^2} + 2\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{c^2+a^2}\right)} \geq 6 + 9\sqrt{2}$. Tinjau pula bahwa $a + \sqrt{b^2+c^2} \geq a + \frac{b+c}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)a+3}{\sqrt{2}}$.

**8.22.** Buktikan $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^n}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$ untuk setiap $n \geq 2$. Gunakan **Teorema 5.5**.

**8.23.** Tinjau $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{2}{a_1+a_3} + \frac{2}{a_3+a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{2n-1}+a_1}$ dan gunakan $(a+b)^2 \geq 4ab$.

**8.24.** Gunakan **Teorema 2.11** dan bongkar $(a+2b+3c+4d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \leq (a+b+c+d)^3$.

# §10 Solusi Soal Terpilih

**8.4** Apabila ada $a_i = 0$, maka $a_{i+1} = \frac{4a_i^2}{4a_i^2+1} = 0$ sehingga secara induktif diperoleh $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Apabila $a_i \neq 0$ untuk setiap $1 \le i \le n$. Tinjau bahwa $a_{i+1} = \frac{4a_i^2}{4a_i^2+1} > 0$ yang berarti $a_i > 0$ untuk setiap $1 \le i \le n$. Dari $AM \ge GM$, kita punya

$$a_{i+1} = \frac{4a_i^2}{4a_i^2+1} \le \frac{4a_i}{2\sqrt{4a_i^2}} = a_i \implies a_{i+1} \le a_i.$$

Sehingga kita bisa peroleh $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge a_1$ yang mana ini menyimpulkan $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = k$. Kita punya

$$k = \frac{4k^2}{4k^2+1} \iff 4k^2 - 4k + 1 = 0 \iff (2k-1)^2 = 0 \iff k = \frac{1}{2}.$$

Kita punya $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{2}$. Jadi, solusi yang kita peroleh adalah $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \boxed{(0,0,\cdots,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)}$.

**8.7** Konstruksi segitiga $ABC$ dan titik $P$ terletak di dalam segitiga tersebut sedemikian sehingga $\angle ABP = \angle CBP = 60^\circ$. Misalkan pula panjang $BC = a, BP = b$, dan $AB = c$. Dari aturan kosinus $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle ABC$, kita punya

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2+b^2-ab} \\ CP &= \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ} = \sqrt{b^2+c^2-bc} \\ AC &= \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 120^\circ} = \sqrt{a^2+ac+c^2}. \end{aligned}$$

Tinjau segitiga $APC$, maka berlaku ketaksamaan

$$AP + PC \ge AC \iff \sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} \ge \sqrt{a^2+ac+c^2}$$

di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $A, P, C$ segaris. ■

**8.9** Dari $AM \ge GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab+1}{b}\right)^2 \ge \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{2\sqrt{ab}}{b}\right)^2 = \sum_{\text{cyc}} \frac{4a}{b} = \sum_{\text{cyc}} 4a^2c.$$

Sekali lagi dengan $AM \ge GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} 4a^2c = \sum_{\text{cyc}} \left(ab^2 + ab^2 + bc^2\right) + \sum_{\text{cyc}} ab^2 \ge \sum_{\text{cyc}} 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2} + 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3a + 3b + 3c + 3$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = c = 1$. ■

**8.14** Substitusi $a = x + y, b = y + z$, dan $c = z + x$. Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\frac{8x^4}{y^2+xy} + \frac{8y^4}{z^2+yz} + \frac{8z^4}{x^2+xz} \ge x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx).$$

Misalkan $x^2 + y^2 + z^2 = m$ dan $xy + yz + zx = n$. Dari **Teorema 3.5**, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8x^4}{y^2+xy} = 8\sum_{\text{cyc}} \frac{x^4}{y^2+xy} \ge 8\sum_{\text{cyc}} \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} = \frac{8m^2}{m+n}.$$

Dari **Contoh 1.3**, kita punya $m \ge n$. Kita peroleh

$$\frac{8m^2}{m+n} \ge \frac{8m^2}{2m} = 4m \ge m + 3n \implies \frac{8m^2}{m+n} \ge m + 3n$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = y = z \iff a = b = c$. ■

**8.17** Misalkan $a+b+c=p, ab+bc+ca=q$, dan $abc=r$. Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} \frac{q}{p^2-q} &\geq \frac{4r}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4r}{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc} \\ \iff \frac{q}{p^2-q} &\geq \frac{4r}{pq-r} \\ \iff pq^2-qr &\geq 4p^2r-4rq \\ \iff pq^2+3qr &\geq 4p^2r. \end{aligned}$$

Bentuk terakhir ekuivalen dengan

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3 \geq 2a^3bc+2ab^3c+2abc^3.$$

Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\left(a^3b^2+a^2b^3\right) = \sum_{\text{cyc}}\left(a^3b^2+a^3c^2\right) \geq \sum_{\text{cyc}} 2\sqrt{a^6b^2c^2} = \sum_{\text{cyc}} 2a^3bc$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a=b=c$. ■

**8.19** Dari $AM \geq GM$, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}} \geq 3\sqrt[3]{\prod_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}}} = 3\sqrt[6]{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)}.$$

Akan kita buktikan bahwa

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right) \geq 1.$$

Karena ketaksamaan simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$. Kita punya $a+b \geq a+c \geq b+c$ sehingga diperoleh $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Dari **Teorema 5.5** dan $AM \geq GM$, kita punya

$$\frac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}}{2} \geq \frac{a+b}{2}\cdot\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{2} \geq \frac{a+b}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{(b+c)(c+a)}} = \frac{a+b}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}.$$

Sehingga dengan cara sama kita bisa dapatkan

$$\prod_{\text{cyc}}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right) \geq \frac{a+b}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}\cdot\frac{b+c}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}\cdot\frac{c+a}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} = 1.$$

Maka kita punya

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}} \geq 3\sqrt[6]{\prod_{\text{cyc}}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)} \geq 3$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a=b=c$. ■

**8.22** Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^k}{b+c}+\sum_{\text{cyc}}\frac{a^{k-1}}{b+c} \geq a+b+c.$$

Karena ketaksamaan simetris, W.L.O.G. $a \geq b \geq c$, diperoleh $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ dan $a^n \geq b^n \geq c^n$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Dari **Teorema 5.5** dan $AM \geq GM$, untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$ berlaku

$$\frac{\sum_{\text{cyc}}\frac{a^n}{b+c}}{3} \geq \frac{a^n+b^n+c^n}{3}\cdot\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}{3} \iff \sum_{\text{cyc}}\frac{a^n}{b+c} \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a+b}\right)\left(a^n+b^n+c^n\right).$$

Dari **Teorema 4.1** dan $AM \geq GM$, maka

$$a^n + b^n + c^n \geq \frac{(a+b+c)^n}{3^{n-1}} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{3}\right)^{n-2} = \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Dari **Teorema 3.5**, kita punya

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Kita peroleh

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a+b}\right)\left(\sum_{\text{cyc}} a^n\right) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Sehingga kita peroleh bahwa

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^k}{b+c} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^{k-1}}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2} = a+b+c$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = c = 1$. ■

# Pustaka

[1] Gaitanas, Konstantinos. (2020). *A New Proof of The AM-GM-HM- inequality.* https://arxiv.org/pdf/2003.02664.pdf, diakses tanggal 12 Juni 2022.

[2] Riasat, Samin. (2008). *Basics of Olympiad Inequalities.* https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/161/articles/Riasat_BasicsOlympiadInequalities.pdf, diakses tanggal 15 Juni 2022.